

모노펄스 레이더 추정각도의 최빈값과 산란점들 각도의 원형 평균과의 관계

Circular Mean of Scatterers' Angles as the Mode of Angle Estimates with Monopulse Radar

전주환¹ · 정준영^{2*} · 우종찬^{3*} · 박상우^{4*}Joohwan Chun¹ · Junyoung Jung^{2*} · Jongchan Woo^{3*} · Sangwoo Park^{4*}

요 약

레이더는 큰 표적이나 구조물을 다수의 산란점들로 인식하는데, 추적레이더의 경우, 이들을 미분해 산란점 각도들의 평균각도를 추정하는 것이 중요하다. 본 단편 논문에서는 일반적 모노펄스 각도 추정값들의 최빈값이 이들 산란점 각도들의 가중치 원형 평균값임을 해석적으로 보이고 모의실험으로 확인하였다.

Abstract

In radar, an extended target or structure is perceived as a collection of multiple point scatterers. For tracking radar, determining the weighted mean (or centroid) angle of these unresolved scatterers is crucial. Our study demonstrates that the monopulse angle estimate corresponds to the weighted circular mean of the angles of multiple scatterers, as supported by both analytical and simulation results.

Key words: Extended Target, Monopulse Radar, Angle Estimation, Circular Mean

I. 서 론

단일 점표적의 경우 무지향성 두 안테나에서의 기저대역(baseband) 측정값을 z_0, z_1 라고 하고, sum/Δ 신호를 각각 $\Sigma = z_0 + z_1$, $\Delta = z_0 - z_1$ 로 표시하자. 그림 1에 이들을 복소평면에 보였다. 이제 z_0, z_1 사이의 각도를 $u = \arg(z_1) - \arg(z_0)$ 라고 하면 $\tan(u/2) = |\Delta|/|\Sigma|$, $\Delta/\Sigma = (|\Delta|/|\Sigma|)e^{-j\pi/2}$ 이므로

$$u = 2\arctan\left(-\text{Im}\frac{\Delta}{\Sigma}\right) \quad (1)$$

로 표현할 수 있다^[1]. 즉 두 안테나에서 받은 평면파의 위

상차는 Σ, Δ 값으로부터 식 (1)에서 구할 수 있고, 평면파의 도래각(angle of arrival), θ 는 $\sin\theta = u/(kd)$ 로부터 얻을 수 있다. 여기서 k, d 는 각각 파수(wave number), 안테나 사이의 거리를 의미한다.

모노펄스 레이더로 N_t 개의 산란점을 가지고 있는 큰 표적(extended target)의 각도를 측정하려고 할 경우, 고해상도가 아닌 일반 레이더를 사용하게 되면 이들 산란점들은 분해되지 않고(unresolved) 같은 거리셀, 같은 도플러 셀 안에 존재하게 된다. 이때 두 안테나에서의 측정값은 식 (2)와 같다.

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{n}, \quad \mathbf{z} = [z_0, z_1]^T. \quad (2)$$

†이 논문은 2019년 정부(방위사업청)의 재원으로 국방과학연구소의 지원을 받아 수행된 연구임(UC190063FD).‡

한국과학기술원 전기전자공학부(School of EE, KAIST)

*한화시스템 특수레이더팀(Specific Radar Team, Hanwha Systems)

1: 교수(<https://orcid.org/0000-0002-3506-1722>), 2: 전문연구원(<https://orcid.org/0000-0002-7593-8525>),

3: 전문연구원(<https://orcid.org/0009-0003-4721-8007>), 4: 선임연구원(<https://orcid.org/0009-0008-6738-7701>)

· Manuscript received June 26, 2023 ; Revised July 9, 2023 ; Accepted July 27, 2023. (ID No. 20230626-043)

· Corresponding Author: Joohwan Chun (e-mail: chun@kaist.ac.kr)

여기서 A , s , n 은 각각 배열응답 행렬, 신호, 덧셈잡음을 의미하며 식 (3)과 같이 표현할 수 있다

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{ju_1} & e^{ju_2} & \dots & e^{ju_{N_t}} \end{bmatrix},$$

$$s = [w_1 e^{-j\phi_1}, w_2 e^{-j\phi_2}, \dots, w_{N_t} e^{-j\phi_{N_t}}]^T,$$

$$n = [n_0, n_1]^T, \quad n_i \sim CN(0, \sigma_n^2). \quad (3)$$

여기서 CN 은 circular complex normal을 의미하며, 산란점 i 의 안테나 1에 대한 안테나 2의 위상은 u_i 로, 산란점 신호의 크기 및 위상은 각각 w_i , ϕ_i 로 표시하였다.

이때 w_i 는 매 시행 시 변하지 않는 결정적 장애모수(deterministic nuisance parameter)이고, ϕ_i 는 레이다와 산란점까지의 거리에 따라 변하는 확률적 장애모수(random nuisance parameter)이다.

본 논문에서는 ϕ_i 가 무작위(random)인 다중 N_t 산란점의 경우, 모노펄스 레이다로 추정된 식 (1)의 최빈값(mode)이 가중치 원형 평균값(weighted circular mean), $\arg \sum_{i=1}^{N_t} w_i e^{ju_i}$ 임을 증명하였다 (그림 1). 이와 같은 사실은 지금까지 공개된 참고문헌(예를 들어 참고문헌 [1] 및 참고문헌[2])에 알려진 바 없다. 그림 2에 가중치 원형평균값의 의미를 보였다. 참고로 선형평균값 $\left(\frac{\sum_{i=1}^{N_t} w_i u_i}{\sum_{i=1}^{N_t} w_i} \right)$ 은 u_i 가 크지 않을 경우 원형 평균값과 거의 차이가 없는 데, 각도와 같이 방향성이 있는 값들의 평균값을 다룰 때는 원형평균값이 더 적합함이 잘 알려져 있다[3].

II. 통계량 (Statistic) 분포의 유도

산란점의 개수가 N_t 일 때 두 안테나에서 받은 측정값을

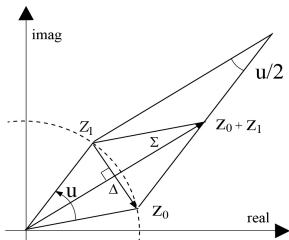


그림 1. 모노펄스의 기하학적 해석

Fig. 1. Geometric interpretation of the monopulse operation.

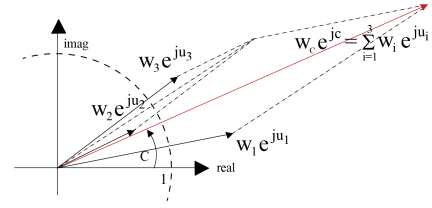


그림 2. 각도의 가중치 원형 평균

Fig. 2. Weighted circular mean of angles.

$$z_0 = \sum_{i=1}^{N_t} w_i e^{-j\phi_i}, \quad z_1 = \sum_{i=1}^{N_t} w_i e^{j(-\phi_i + u_i)} \quad (4)$$

라고 하고 식 (5)의 함수

$$f(\phi) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_0) \quad \phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_t}] \quad (5)$$

를 정의하자. 또한 ϕ_i 가 균일분포(uniform distribution) $\phi_i \sim U(-\pi, \pi)$ 라고 가정하고, ϕ 의 퍼짐(range or spread)을 식 (6)과 같이 정의하며,

$$sp(\phi) = \max_{1 \leq i, j \leq N_t} |\phi_i - \phi_j|, \quad (6)$$

$f(\phi)$ 의 정의역(domain)이 식 (7)과 같다고 하자.

$$D = \{\phi | -\pi \leq \phi_i \leq \pi, sp(\phi) = r\}. \quad (7)$$

이 경우 $0 \leq r \leq R$ 일때 확률변수 $c = f(\phi)$ 의 확률밀도함수는 식 (8)과 같이 표현할 수 있다.

$$p_c(c | sp(\phi) \leq R) = \int_0^R p_c(c | sp(\phi) = r) p(sp(\phi) = r) dr \quad (8)$$

편의상 우선 $N_t = 3$ 인 경우를 고려하자. 이제 $p_c(c | sp(\phi) = r)$ 을 구하기 위하여 $f(\phi)$ 의 3차원 정의역(domain) D 를 식 (9)와 같이 6개의 ($1 \leq i \leq 6$) 1차원 정의역으로 분해(partition)하자:

$$D_i = \{\phi_{\sigma_i(1)} = 0, 0 \leq \phi_{\sigma_i(2)} \leq r, \phi_{\sigma_i(3)} = r\}, \quad (9)$$

여기서 σ_i 는 (1, 2, 3)의 여섯개의 순열(permutation)로서 $\sigma_1 = (1, 2, 3)$, $\sigma_2 = (2, 3, 1)$, $\sigma_3 = (3, 1, 2)$, $\sigma_4 = (1, 3, 2)$, $\sigma_5 = (2, 1, 3)$, $\sigma_6 = (3, 2, 1)$ 를 의미한다.

이제 정의역이 D_i 로 한정된 함수 f 를 $f_i(\phi_{\sigma_i(2)})$ 라고 하면, 확률변수의 함수(function of random variables)에 관

한 잘 알려진 정리^[4]를 사용하여

$$p_c(c|sp(\phi) = r) = \sum_{i=1}^6 p_c^{(i)}(c|sp(\phi) = r) \quad (10)$$

$$p_c^{(i)}(c|sp(\phi) = r) = \sum_{j=1}^M \left| \frac{df_{i,j}^{-1}(c)}{dc} \right| p_\phi(f_{i,j}^{-1}(c)|sp(\phi) = r) \quad (11)$$

임을 알 수 있다. 여기서 $f_{i,j}$ 는 f_i 를 M 개의(monotonic) 1:1 함수로 분해한 j 번째 함수이다.

함수 f_i 를 각각 $f_i(0)$, $f_i(r)$ 를 지나는 직선으로 근사하면 $M=1$ 이 되고, 식 (11)은 식 (12)와 같이 간략화된다.

$$p_c^{(i)}(c|sp(\phi) = r) = \begin{cases} 1/b : c_{\min}^{(i)} \leq c \leq c_{\max}^{(i)} \\ 0 : \text{elsewhere} \end{cases} \quad (12)$$

여기서 $b=|f_i(0)-f_i(r)|$, $c_{\min}^{(i)} = \min(f_i(0), f_i(r))$, $c_{\max}^{(i)} = \max(f_i(0), f_i(r))$ 이다.

이제^[4], 106쪽의 order statistic의 퍼짐에 관한 정리 2.2를 $n=N_i=3$ 인 경우, $-\pi \leq r \leq \pi$ 의 균일분포에 대하여 적용하고 적분하면 식 (13)을 얻는다.

$$p(sp(\phi) = r) = \frac{3}{\pi} - \frac{3r^2}{4\pi^3} \quad (13)$$

이제 마지막으로 식 (10), 식 (12) 및 식 (13)을 식 (8)에 대입하면 $p_c(c|sp(\phi) \leq R)$ 를 구할 수 있다.

그림 3~그림 5에 $\mathbf{u} = [-2.0, -0.3, 1.4]$, $\mathbf{w} = [1.2, 0.7, 1.4]$ 의 경우를 보였다.

그림 3은 $R=80^\circ$ 일 때 $f_i(\phi)$, $\phi = \phi_{\sigma_i(2)}$,

$$f_i(\phi) = \tan^{-1} \left[\frac{w_1 \sin u_1 + w_2 \sin(-\phi + u_2) + w_3 \sin(-r + u_3)}{w_1 \cos u_1 + w_2 \cos(-\phi + u_2) + w_3 \cos(-r + u_3)} \right] - \tan^{-1} \left[\frac{w_2 \sin(-\phi) + w_3 \sin(-r)}{w_1 + w_2 \cos(-\phi) + w_3 \cos(-r)} \right] \quad (14)$$

을 보인 것으로서

그림 4에 $0 \leq r \leq R=80^\circ$ 각각에 대하여 식 (10) 및 식 (12)를 보였다. 왼쪽의 수렴하는 값, -0.15 는 식 (14)에 $r=\phi=0$ 을 대입한 값,

$$\tan^{-1} \left[\frac{w_1 \sin u_1 + w_2 \sin(u_2) + w_3 \sin(u_3)}{w_1 \cos u_1 + w_2 \cos(u_2) + w_3 \cos(u_3)} \right]$$

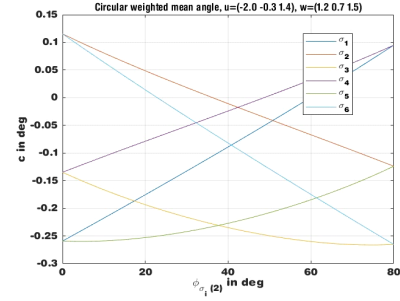


그림 3. 여섯 개의 1-D 함수

Fig. 3. Six 1-D functions $c = f_i(\phi)$.

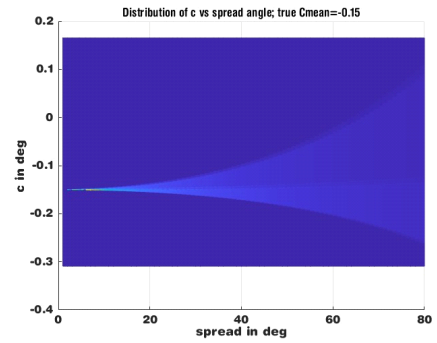


그림 4. 퍼짐각에 따른 c의 분포

Fig. 4. Distribution of c vs spread angles.

으로서 \mathbf{u} 의 원형 가중치 평균값임을 알 수 있다.

그림 5에 식 (8)의 결과를 보였다. $c=f(\phi)$ 의 분포의 최빈값은 \mathbf{u} 의 원형 가중치 평균값, -0.15 에서 나타난다. 또한 각도들이 작을 경우 선형평균(Lmean)과 원형평균(Cmean)이 거의 일치함을 볼 수 있다. 하지만 분포 c 가 비대칭(skew)이어서 \mathbf{c} 의 평균값은 최빈값보다 약간 오른

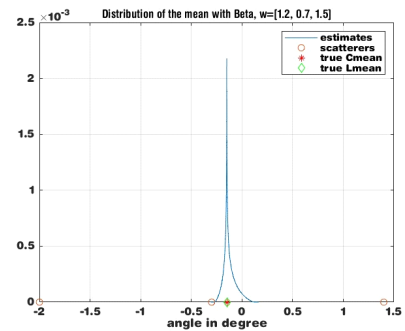


그림 5. $r \leq 80^\circ$ 일 때 추정통계량의 분포

Fig. 5. Distribution of the estimation statistic when $r \leq 80^\circ$.

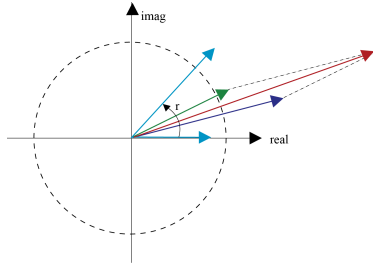


그림 6. $N_t = 4$ 를 $N_t = 3$ 으로 변환하는 법
Fig. 6. Converting $N_t = 4$ to $N_t = 3$.

쪽에 위치할 것이다.

이상에서 설명을 쉽게 하기 위하여 정의역이 1차원으로 분해되는 $N_t = 3$ 인 경우를 고려하였는데, $N_t > 3$ 일 경우는 $N_t!$ 순열 각각에 대하여 $\phi_{\sigma_i(N_t)} - \phi_{\sigma_i(1)} = r$ 로 고정하고, $w_i \exp(-j\phi_{\sigma_i(2)}), \dots, w_i \exp(-j\phi_{\sigma_i(N_t-1)})$ 는 변화시키며 하나의 합벡터로 취급하면 지금까지 다룬 $N_t = 3$ 인 경우가 된다.

예를 들어 그림 6에서 $N_t = 4$ 인 경우를 보였는데, 총 24개의 순열에 대하여 양쪽 (하늘색) 벡터를 각도 r 로 고정하고 중앙의 두 벡터 (초록색, 파란색)를 2-D 공간에서 변화시키되 합벡터 (붉은색)으로 취급한다.

III. 모의실험

II절에서 유도한 결과를 검증하기 위하여 균일분포를 따르는 $\phi_i \sim U(-\pi, \pi)$ 를 발생시켜서 $sp(\phi) < 80^\circ$ 를 선택하여 그림 7 및 그림 8에 그림 4 및 그림 5에 해당하는

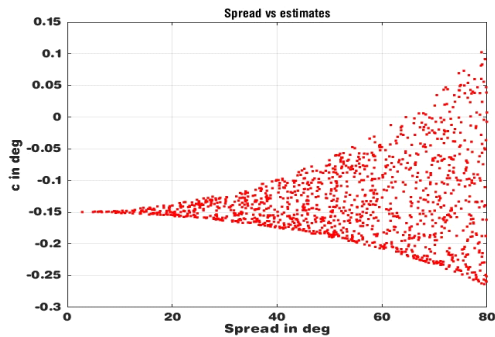


그림 7. $p_c(c|sp(\phi) = r)$ 의 산포도
Fig. 7. Scatter plot of $p_c(c|sp(\phi) = r)$.

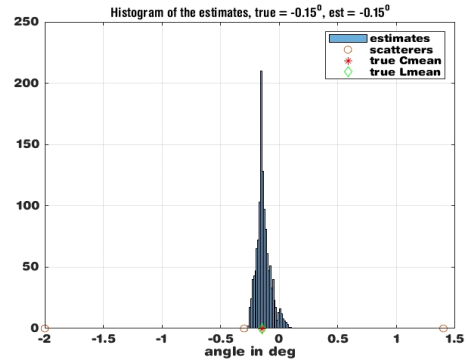


그림 8. $p_c(c|sp(\phi) \leq 80^\circ)$ 의 히스토그램
Fig. 8. Histogram of $p_c(c|sp(\phi) \leq 80^\circ)$.

산포도와 히스토그램을 그렸다. 두 경우 모두 이론적으로 얻은 결과와 일치함을 볼 수 있다.

IV. 결 론

다중 산란점의 위상이 균일분포를 가질 때 일반적 모노펄스 원리로 추정한 위상의 분포함수를 정의역 분해방식을 이용하여 적분식(식 (8))으로 표현하고, 근사과정을 거쳐서 수치해석적으로 얻었다(그림 5). 이 결과는 다시 모의실험으로 검증하였다. 여기서 추정한 위상의 최빈값은 각각 산란점 위상값의 가중치 원형 평균값이라는 점을 알 수 있었다. 본 연구의 의의는 모노펄스레이다에 의한 미분해 다수 산란점들의 각도추정값이 적절함을 엄밀하게 확인하는 데 있다.

References

- [1] S. M. Sherman, D. K. Barton, *Monopulse Principles and Techniques*, 2nd ed. London, Artech House, 2011.
- [2] G. A. Gordon, "Monopulse estimation of the centroid of an ensemble of radar scatterers," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-11, no. 1, pp. 94-102, Jan. 1975.
- [3] K. V. Mardia, P. E. Jupp, *Directional Statistics*, Hoboken, NJ, John Wiley & Sons, 1999.
- [4] A. Gut, *An Intermediate Course in Probability*, 2nd ed. New York, NY, Springer, 2013.