

## 메타표면 반사계수 계산을 위한 정사각형 패치의 전기 분극률 계산

Calculation of Electric Polarizability of Square Patch for  
Calculating Reflection Coefficient of Metasurface

이 선 규 · 이 정 해

Sun-Gyu Lee · Jeong-Hae Lee

## 요 약

메타표면에 가장 많이 이용되는 전기적으로 작은 크기를 갖는 정사각형 패치에 전위 연속성을 이용하여 접선방향 전기 분극률을 계산 방법을 제안하였다. 패치의 경우, 중심에 위치한 등가 전기 쌍극자에 의한 패치 표면에서의 전위가 균일하지 않기 때문에, 분극률이 한 개의 값으로 정의되지 않는 문제가 있었다. 이를 해결하기 위하여 패치 표면을 메쉬로 나누고, 각 점에서 얻어진 분극률을 평균함으로써 등가 분극률을 계산하였다. 제안된 방법, 기존의 먹급수 3차항 근사식, 실험식의 결과를 비교하여 잘 일치함을 보였다. 제안된 방법으로 구해진 분극률을 generalized sheet transition conditions(GSTCs)에 적용하여 계산된 메타표면의 반사계수의 크기와 위상이 ANSYS HFSS(high-frequency structure simulator) 모의실험 결과와 잘 일치함을 보였다.

## Abstract

The tangential electric polarizability of a electrically small square patch, which is commonly used in metasurfaces, is calculated using electric potential continuity. Since the potential at the patch surface is not uniform due to the equivalent electric dipole located at the center, there is a problem in that the polarizability is not uniquely defined. To obtain equivalent polarizability, the meshes in the analysis area are divided on the patch surface, and the equivalent polarizability is calculated by averaging the polarizabilities obtained at each point. The results of the proposed method, third-power series approximation, and experimental equations are compared and verified. Finally, the magnitude and phase of the reflection coefficient of patch metasurface calculated by generalized sheet transition conditions(GSTCs) are in good agreement with the HFSS simulation results.

Key words: Polarizability, Electric Potential Continuity, Electrically Small Scatterer, Square Patch, Metasurface, GSTCs

## I. 서 론

최근 전자기파의 크기와 위상을 제어하기 위한 응용으로 메타표면이 널리 이용되고 있다<sup>[1]~[5]</sup>. 이에 메타표면의 경계에서 발생하는 전자기파의 크기와 위상의 불연속

을 해석하기 위한 방법인 generalized sheet transition conditions (GSTCs)<sup>[6]</sup>가 도입되었다. GSTCs의 핵심 변수는 배열된 산란체들에 의한 전기·자기 분극률 밀도(electric·magnetic polarizability density)이며, 단일 산란체의 분극률(polarizability)에 의해 계산되어진다. 따라서 메타표면을

「이 연구는 2015년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(No. 2015R1A6A1A03031833).」

홍익대학교 전자전기공학과(Department of Electronic and Electrical Engineering, Hongik University)

· Manuscript received February 6, 2018 ; Revised May 15, 2018 ; Accepted July 12, 2018. (ID No. 20180206-019)

· Corresponding Author: Jeong-Hae Lee (e-mail: jeonglee@hongik.ac.kr)

해석하기 위한 단일 산란체의 분극률의 계산이 중요해지고 있다.

분극률 텐서(polarizability tensor)를 이용한 접근법은 Lord Rayleigh가 전기적인 크기가 작은 산란체의 산란현상 설명하기 위해 처음으로 도입하였다<sup>[7]</sup>. 그 후에 W. H. Eggimann 원형 금속판의 분극률 계산에 먹굽수 고차항 해석 방법을 도입한 해법<sup>[8]</sup>이 제시되었고, 이것은 분극률 이론적 계산의 기초가 되었다. 후속 연구들에서 먹굽수 3차 및 4차항을 고려한 개구면에 대한 분극률이 계산되었고<sup>[9],[10]</sup>, 여기에 Babinet's principle의 상보 스크린 관계<sup>[11]</sup>를 적용함으로써 금속판에서의 분극률을 얻을 수 있다. 그러나 고차 항을 고려한 해석방법은 실험식<sup>[12]</sup>과 비교하였을 때 정확하지만 수식 유도 과정이 복잡한 단점이 있다.

본 논문에서는 금속 산란체 표면에서 전위 연속성(electric potential continuity)<sup>[13]</sup>을 적용하여, 정사각형 패치의 접선방향의 전기 분극률을 쉽게 계산하는 방법을 제안하였다. 계산된 분극률이 패치의 표면에서 일정하지 않은 문제를, 해석영역인 메쉬를 나누고 분극률 값들을 평균함으로써 수치 해석적으로 해결하였다. 또한 계산된 분극률을 기존의 방법들과 비교하고, GSTCs에 적용하여 제안된 방법이 유효함을 검증하였다.

## II. 정사각형 패치의 분극률 계산

정전기학 경계조건에 의하면, 매질의 경계에서 접선방향 성분의 전계는 연속이어야 한다<sup>[14]</sup>. Perfect electric conductor (PEC)에 외부에서 전계를 가하였을 때, 내부에는 전계가 존재할 수 없기 때문에 경계조건에 의해 PEC 표면에서의 접선방향 성분의 전계는 0이 되어야 한다. 이는 영상이론(image theory)에 의해 접지면 반대쪽에 가상 영상전원을 놓음으로써 제거되어진다. 이를 다음과 같이 패치의 표면에 접선방향으로 분리된 전하에 의한 등가 유도 전기 모멘트(equivalent induced electric dipole moment)로 나타낼 수 있다<sup>[13]</sup>.

$$\vec{p} = q\vec{d} = \epsilon_0 \vec{\alpha}_E \cdot \vec{E} \quad (1)$$

여기서  $\vec{d}$ 는 양전하와 음전하 사이의 거리 벡터,  $\vec{\alpha}_E$  [m<sup>3</sup>]는 전기 분극률 텐서,  $\vec{E}$ 는 외부에서 가해진 전계를 나타낸다.

전기적으로 작은 크기를 갖는 산란체에 외부에서 접선방향의 정전계를 가하면, 실제로 전하들이 산란체 전체에 걸쳐 분포되어 있을 것이다. 여기서 중심에 위치한 한 개의 이상적인 등가 전기 쌍극자(equivalent ideal electric dipole)를 가정함으로써 산란체의 접선방향의 전기 분극률을 계산할 수 있다.

기존의 금속 원형 구의 전기 분극률 계산 방법<sup>[13]</sup>으로부터, 정사각형 패치의 접선방향 전기 분극률을 계산할 수 있다. 정사각형 패치는 그림 1과 같이 직육면체 모델에서 두께  $t \rightarrow 0$ 으로 설정함으로써 가정할 수 있다. 먼저, 외부에서  $y$ 방향으로 가해진 정전계에 의한 임의의 점  $r$ 에서의 전위는 다음과 같다.

$$V_{applied} = -Ey \quad (2)$$

등가 전기 쌍극자에 의한 패치 외부의 임의의 점  $r$ 에서의 전위<sup>[15]</sup>를 직교좌표계에서 표현하면 다음과 같다.

$$V_{dipole} = \frac{p \sin \phi}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \frac{y}{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3)$$

여기서 그림 1의 직교좌표계에서  $\sin \phi = y/r$ 이다. 전위 연속성<sup>[13]</sup>에 의해, 금속 패치의 외부에서의 전위는 외부에서 가해진 전계에 의한 전위와 이상적인 등가 전기 쌍극자( $d \rightarrow 0$ )에 의한 전위의 합으로 나타낼 수 있다. 또한, 금속 내부에서는 전계가 존재하지 않기 때문에 금속 내부에서의 전위  $V_{in}=0$ 이 된다. 이를 정리하면 다음과 같다.

$$V_{out} = -Ey + \frac{p \frac{y}{r_{surf}}}{4\pi\epsilon_0 r_{surf}^2} = V_{in} = 0 \quad (4)$$

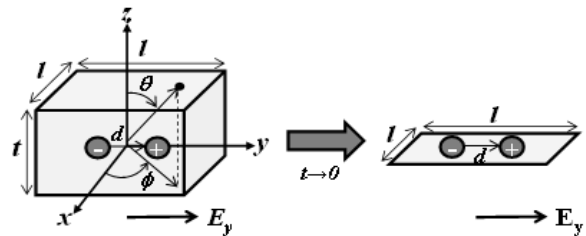


그림 1. 전기 분극률 계산을 위한 정사각형 패치 모델  
Fig. 1. Square patch for calculating electric polarizability.

$$\alpha_{E,yy} = 4\pi r_{surf}^3$$

$$\text{where } r_{surf} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5)$$

여기서  $t \rightarrow 0$ 인 경우에  $\theta = 90^\circ$ 가 되며,  $\phi$ 에 의한 전위 변화만 존재하게 된다.  $r_{surf}$ 은 전기 쌍극자 중심으로부터 패치 표면 임의의 점까지의 거리이다. 또한  $y$ 방향으로 가해진 전계를 가정하였기 때문에  $y$ 방향에 대한 분극률이 계산되어졌다. 이를 전기 분극률에 위첨자  $yy$ 로 표기하였다. 전기 쌍극자로부터 표면까지의 거리  $r_{surf}$ 이 변화하기 때문에 분극률이 좌표에 따라 여러 값을 가짐을 알 수 있다. 이는 식 (4)에서 전기쌍극자로부터 패치 표면에 형성되는 전위가 변화하기 때문이다. 패치의 등가 전기 분극률을 얻기 위해 표면에 해석 영역인 메쉬를 나누고, 각 점에서 계산된 분극률 값들을 평균함으로써 등가 전기 분극률을 수치 해석적으로 계산하였다.

제안된 방법으로 얻어진 분극률의 정확성을 확인하기 위해서 기존의 먹급수 3차항 근사식<sup>[10]</sup> 및 실험식<sup>[12]</sup>과 비교하였다. 그림 2는 패치 길이  $l$ 을 3 mm부터 30 mm까지 변화하였을 때의 접선방향 전기 분극률의 결과이다. 먹급수 3차항 근사식은 개구면에서 접선방향의 자기 분극률 (magnetic polarizability)<sup>[10]</sup>에 Babinet's principle의 상보관계<sup>[11]</sup>를 적용함으로써 얻을 수 있다. 제안된 방법의 결과는

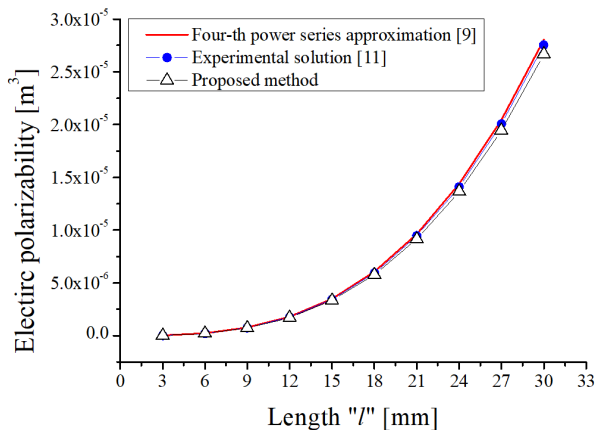


그림 2. 실험식, 먹급수 3차항 근사식, 제안된 방법의 분극률 결과 비교

Fig. 2. Comparison of polarizability results of experimental solution, third-power series approximation, and proposed method.

실험식 및 먹급수 3차항 근사식 결과와 비교하여 잘 일치하였다. 실험식을 기준으로 한 상대오차는 먹급수 3차항 근사식의 경우에 1.8 %, 제안된 방법의 경우에 3.1 %의 오차를 가졌다.

제안된 분극률 계산 결과를 GSTCs에 적용하여 반사계수를 계산하고, 이를 모의실험 결과와 비교하였다. 모의실험 도구는 ANSYS HFSS(high-frequency structure simulator)가 사용되었고, 메타표면 해석을 위한 모의실험 환경을 그림 3에 나타내었다. 무한 주기 구조 해석을 위한 2개의 Floquet port가 이용되었으며, 평면파 형성을 위하여 port 1과 port 2로부터 각각  $\lambda_0/2$ 만큼 떨어진 위치에 메타표면의 단위 셀을 위치시켰다. 여기서  $\lambda_0$ 는 관찰 주파수 중에 가장 높은 주파수인 5 GHz를 기준으로 하였다. 무한 주기 구조 해석을 위하여 마주보는 두 쌍의 면에 각각 master & slave boundary를 적용하였다. 단위 셀의  $l$ 은 패치의 길이를 나타내며, 제안된 방법의 조건에 따라 파장에 비해 충분히 작게 설정되었다. 또한  $p$ 는 배열된 패치의 주기이며, 메타표면의 정의에 의해  $\lambda_0/4$ 보다 작도록 설정하였다. 분극률로부터 분극률 밀도를 계산<sup>[6]</sup>하고, 분극률 밀도로부터 직각입사 TE 반사계수를 계산하는 식<sup>[16]</sup>은 다음과 같다.

$$\alpha_{ES}^{yy} = \frac{N \langle \alpha_{E,yy} \rangle}{1 - \frac{N \langle \alpha_{E,yy} \rangle}{4R}} \quad (6)$$

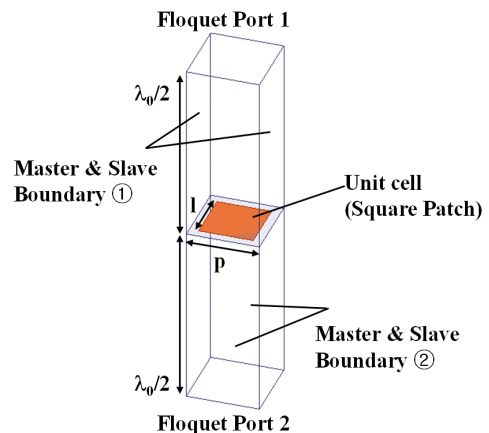


그림 3. 메타표면 해석을 위한 시뮬레이션 환경

Fig. 3. Simulation environment for metasurface analysis.

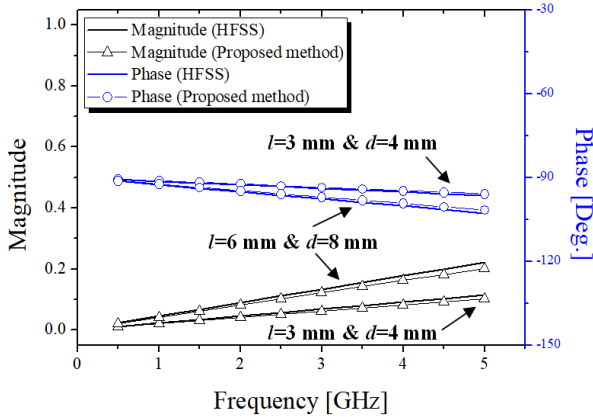


그림 4. 제안된 방법과 GSTCs로부터 계산된 TE 반사계수의 크기와 위상

Fig. 4. Magnitude and phase of TE reflection coefficient calculated by using proposed method and GSTCs.

$$\Gamma_{TE} = \frac{-j \frac{k_0}{2} (\alpha_{ES}^{yy} + \alpha_{MS}^{xx})}{1 + \left( \frac{k_0}{2} \right)^2 \alpha_{MS}^{xx} \alpha_{ES}^{yy} + j \frac{k_0}{2} (\alpha_{ES}^{yy} - \alpha_{MS}^{xx})} \quad (7)$$

여기서  $\alpha_{ES}^{yy}$ 와  $\alpha_{MS}^{xx}$ 는 각각 전기 분극률 밀도와 자기 분극률 밀도를 나타낸다.  $R \approx 0.6956p^{[6]}$ 이며,  $k_0$ 는 공기에서의 전파 상수를 나타낸다. 패치의 윗면과 아랫면에 흐르는 전류 분리가 없기 때문에  $\alpha_{MS}^{xx}=0$ 이다<sup>[6]</sup>.

그림 4는 제안된 방법으로 얻어진 전기 분극률을 GSTCs에 적용하여 계산된 반사계수 결과를 나타낸다. 제안된 방법으로 얻어진 분극률에 의해 계산된 결과는  $l=3 \text{ mm}$  &  $p=4 \text{ mm}$ ,  $l=6 \text{ mm}$  &  $p=8 \text{ mm}$ 의 두 가지 경우 모두 잘 일치하였다. 5 GHz 주파수에서 반사계수의 크기는 0.02, 위상은  $1^\circ$  이하의 오차가 발생하였으며, 이는 제안된 방법으로 얻어진 분극률의 오차가 GSTCs 적용에서 작은 오차를 가짐을 나타낸다.

### III. 결 론

본 논문에서는 전위 연속성을 이용한 정사각형 패치의 접선방향의 전기 분극률의 계산방법을 제안하였다. 중심에 위치한 전기 쌍극자로부터 패치 표면까지의 거리가 다르기 때문에 한 개의 전기 분극률로 정의되지 않는 문

제가 있었다. 이를 해결하기 위해서 패치 표면을 메쉬로 나누고, 각 점에서 얻어진 분극률을 평균함으로써 등가 전기 분극률을 얻었다. 실험식과 비교하여 계산된 결과의 오차는 3.1 %로 기존의 먹급수 3차항 근사식의 1.8 % 대비 조금 더 큰 오차를 가졌지만, GSTCs 결과에서 오차가 작기 때문에 수용할 수 있음을 확인하였다. 제안된 방법을 확장하여 임의의 구조에서 복잡한 수식 없이도 전기 분극률 계산이 가능할 것으로 예상된다.

### References

- [1] J. G. Lee, J. H. Lee, "Low-profile dual-band superstrate antenna using metasurface," *Progress In Electromagnetics Research C*, vol. 77, pp. 175-184, 2017.
- [2] H. X. Xu, T. Cai, Y. Q. Zhuang, Q. Peng, G. M. Wang, and J. G. Liang, "Dual-mode transmissive metasurface and its applications in multibeam transmitarray," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 65, no. 4, pp. 1797-1806, Apr. 2017.
- [3] X. Zeng, L. Zhang, G. Wan, and M. Gao, "Active metamaterial absorber with controllable polarisation and frequency," *Electronics Letters*, vol. 53, no. 16, Aug. 2017.
- [4] N. Hussain, K. E. Kedze, and I. Park, "Performance of a planar leaky-wave slit antenna for different values of substrate thickness," *Journal of Electromagnetic Engineering and Science*, vol. 17, no. 4, pp. 202-207, Oct. 2017.
- [5] 정희준, 임성준, "그라운드를 전환하여 주파수를 가변할 수 있는 광대역 메타물질 흡수체," 한국전자파학회 논문지, 29(4), pp. 241-246, 2018년 4월.
- [6] E. F. Kueste, M. A. Mohamed, M. Piket-May, and C. L. Holloway, "Averaged transition conditions for electromagnetic fields at a metafilm," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 51, no. 10, pp. 2641-2651, Oct. 2003.
- [7] J. W. Strutt, "On the light from the sky, its polarization and colour," *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Series 4, vol. 41, no. 271, pp. 107-120, 1871.
- [8] W. H. Eggimann, "Higher-order evaluation of electromag-

netic diffraction by circular disks," *IRE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 9, no. 5, pp. 408-418, Sep. 1961.

- [9] N. A. McDonald, "Polynomial approximations for the electric polarizabilities of some small apertures," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 33, no. 11, pp. 1146-1149, Nov. 1985.
- [10] N. A. McDonald, "Polynomial approximations for the transverse magnetic polarizabilities of some small apertures," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 35, no. 1, pp. 20-23, Jan. 1987.
- [11] H. G. Booker, "Slot aeriels and their relation to complementary wire aeriels(Babinet's principle)," *Journal of the Institution of Electrical Engineers*, vol. 93, no. 4, pp. 620-626, 1946.
- [12] J. F. Douglas, E. J. Garboczi, "Intrinsic viscosity and the

polarizability of particles having a wide range of shapes," *Advances in Chemical Physics*, vol. 91, pp. 85-153, 1995.

- [13] W. E. Kock, "Metallic delay lenses," *Bell Labs Technical Journal*, vol. 27, no. 1, pp. 58-82, Jan. 1948.
- [14] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, 2nd ed. John Wiley & Sons, pp. 12-18, 2012.
- [15] D. K. Cheng, *Fundamentals of Engineering Electromagnetics*, International Edition, pp. 93-94, Addison-Wesley, 1993.
- [16] C. L. Holloway, M. A. Mohamed, E. F. Kuester, and A. Dienstfrey, "Reflection and transmission properties of a metafilm: With an application to a controllable surface composed of resonant particles," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 47, no. 4, pp. 853-865, Nov. 2005.

## 이 선 규



2016년 2월: 홍익대학교 전자전기공학부 (공학사)  
 2018년 2월: 홍익대학교 전자전기공학과 (공학석사)  
 2018년 3월~현재: 홍익대학교 전자전기공학과 박사과정  
 [주 관심분야] 위상 배열 안테나, 메타 물질

및 메타표면 안테나

## 이 정 해



1985년 2월: 서울대학교 전기공학과 (공학사)  
 1988년 2월: 서울대학교 전기공학과 (공학석사)  
 1996년 2월: UCLA 전기공학과 (공학박사)  
 1993년 3월~1996년 3월: General Atomics 교환연구원

1996년 3월~1996년 8월: UCLA 전기공학과 Postdoctor

1996년 9월~현재: 홍익대학교 전자전기공학부 교수

[주 관심분야] 마이크로파 및 밀리미터파 소자, 안테나, Meta-Material RF 소자, 무선전력전송